

Introduzione alla cartografia e geografia dell'antica Cina

Le radici della rappresentazione geografica

La storia della cartografia cinese affonda le radici in un passato remoto e scarsamente documentato. Durante il periodo degli Stati Combattenti (475-221 a.C.), emergono i primi riferimenti a rappresentazioni geografiche, sebbene l'esiguità delle evidenze impedisca di descrivere dettagli su come questi primi tentativi fossero effettivamente realizzati. Quello che sappiamo è che la necessità di amministrare e difendere vasti territori creò una pressione persistente verso il miglioramento della rappresentazione del mondo fisico. Con l'unificazione sotto la dinastia Qin e l'espansione della Han (206 a.C. - 220 d.C.), la cartografia divenne una pratica sempre più sistematica. Mentre le mappe stesse sono andate perdute, i testi amministrativi e storici che le citano testimoniano che i geografi cinesi riconoscevano la necessità di standardizzare le rappresentazioni territoriali. Questo non era meramente un esercizio astratto di rappresentazione, ma rispondeva a esigenze concrete: pianificazione amministrativa, pianificazione militare, costruzione di infrastrutture e comprensione generale dell'estensione e della composizione dell'impero.

Zhang Heng: l'innovazione della griglia coordinata

Tra le figure che emergono dalla documentazione storica del periodo Han, Zhang Heng (78-139 d.C.) rappresenta un momento cruciale nella storia della cartografia scientifica. Matematico, astronomo, letterato e inventore di straordinaria versatilità, Zhang Heng produsse un'opera cartografica che la **Hou Hanshu** (la storia dei Han compilata nel V secolo d.C.) descrive come "una mappa del mondo conosciuto tracciata con una rete di linee orizzontali e verticali."

L'importanza di questa descrizione risiede nel riconoscimento esplicito di un principio: la rappresentazione territoriale può essere resa sistematica e coerente attraverso una struttura geometrica regolare. Zhang Heng comprese che il problema fondamentale della cartografia non era semplicemente la dislocazione di nomi di luoghi, ma l'istituzione di relazioni proporzionali costanti tra la rappresentazione e la realtà rappresentata. Utilizzava il **li**, un'unità di misurazione standardizzata (approssimativamente 500 metri durante la Han), come unità di base per le sue misurazioni.

La griglia coordinata di Zhang Heng permetteva di rispondere a una domanda precisa: dato un punto sulla mappa con coordinate (x, y) e dato che la scala della mappa è costante, quale distanza separa questo punto da un altro punto sulla mappa con coordinate (x', y') ? Questa non era una domanda

banale nel contesto della cartografia antica, dove molte rappresentazioni erano costruite in modo più narrativo che quantitativo.

Rimane incerto quali fossero i dettagli specifici della griglia di Zhang Heng -se fosse quadrata, quale fosse l'orientamento esatto, quale la scala precisa, o quale la dimensione delle cellule -ma il principio sottostante è chiaro dalle testimonianze storiche disponibili. L'innovazione non risiede in una comprensione moderna del sistema cartesiano (concetto che sarebbe emerso in Occidente solo quindici secoli dopo), ma nel riconoscimento pratico che la regolarità geometrica produce coerenza cartografica.

Pei Xiu e la codificazione dei principi cartografici

Se Zhang Heng rappresentò un'intuizione innovativa, Pei Xiu (224-271 d.C.) rappresentò la sua sistematizzazione consapevole. Ministro dei Lavori Pubblici sotto la dinastia Jin, Pei Xiu fu incaricato di compilare mappe accurate dell'intero impero. A differenza di Zhang Heng, per il quale la nostra conoscenza è mediata da riferimenti posteriori, alcuni frammenti dei scritti di Pei Xiu e delle descrizioni contemporanee del suo lavoro sono giunti sino a noi.

I testi storici posteriori, notevolmente il **Shuijing Zhu** (Commentario al Classico dei Fiumi) compilato da Li Daoyuan nel VI secolo, attribuiscono a Pei Xiu la formulazione di sei principi fondamentali che ogni mappa accurata doveva rispettare. Questi principi rappresentano una sintesi coerente di ciò che i cartografi cinesi avevano imparato attraverso la pratica, trasformato in un programma esplicito di miglioramento cartografico.

Il primo principio era il **fen lü** (分率), letteralmente "divisione proporzionale" o scala. Una mappa doveva possedere una scala uniforme, esplicitamente dichiarata e costante in tutte le direzioni. Pei Xiu utilizzava comunemente scale del tipo 1 **cun** sulla mappa = 100 **li** nel territorio (dove 1 **cun** $\approx$ 2,4 centimetri), corrispondente a una scala di circa 1:2.000.000. Il principio non era meramente tecnico ma rispondeva a una necessità pratica fondamentale: senza una scala dichiarata e uniforme, una mappa perdeva il suo valore come strumento di calcolo e pianificazione.

Il secondo principio era il **zhun wang** (準望), l'orientamento corretto. Le mappe dovevano essere orientate secondo i punti cardinali, con il nord verso l'alto. Pei Xiu probabilmente traeva questo principio dalla tradizione astronomica cinese, dove il nord poteva essere determinato osservando la stella polare e gli altri corpi celesti. L'orientamento standardizzato non era meramente una convenzione, ma permetteva l'integrazione coerente di informazioni provenienti da osservatori diversi e la consultazione intuitiva

della mappa.

Il terzo principio era il *dao li* (道里), la misurazione accurata dei percorsi. Una mappa doveva rappresentare non solo le distanze geometriche tra i punti, ma le distanze effettive lungo i percorsi realmente transitabili. I fiumi raramente procedono direttamente; le strade non seguono linee rette; i confini montani presentano irregolarità significative. Rappresentare un territorio significa rappresentare queste caratteristiche curve e sinuose, non semplicemente il loro collegamento attraverso linee rette. Questo principio implicava la necessità di misurazioni sul campo sistematiche, condotte utilizzando strumenti come il carro odometrico.

Il quarto principio era il *gao xia* (高下), le variazioni di altitudine. La Terra non è piatta; le montagne si elevano, i fiumi scendono attraverso valli. Una mappa che ignorasse queste variazioni topografiche darebbe un quadro incompleto e potenzialmente fuorviante del territorio. Pei Xiu riconosceva che le differenze di elevazione influiscono su una varietà di fattori -percorsi praticabili, deflusso idrico, distribuzione di vegetazione e popolazione -che sono rilevanti per la rappresentazione cartografica.

Il quinto principio era il *fang xie* (方邪), gli angoli e le direzioni. Gli angoli tra elementi geografici significativi -fiumi, strade, confini -dovevano essere rappresentati accuratamente. Questo principio riconosceva che la forma e l'orientamento delle caratteristiche geografiche forniscono informazioni cruciali, oltre alle mere distanze. Una strada che volge bruscamente a nord, oppure il corso di un fiume che cambia direzione, sono dettagli che una mappa accurata non può omettere.

Il sesto principio era il *yu yuan* (迂迴), la compensazione delle curve e della tortuosità. Poiché i veri corsi geografici -fiumi in particolare -seguono percorsi altamente sinuosi, una mappa a scala ridotta non può rappresentare ogni meandro. Il principio riconosceva esplicitamente la necessità di semplificare mantenendo l'essenza: un fiume altamente sinuoso doveva essere rappresentato in modo che il lettore della mappa comprendesse la sua sinuosità generale, anche se non ogni singola curva era disegnata in dettaglio.

Nel loro insieme, questi sei principi costituiscono un programma coerente di cartografia scientifica. Non sono intuizioni isolate, ma una comprensione sistemica che il valore di una mappa risiede nella sua capacità di tradurre accuratamente le proprietà dello spazio geografico reale in una rappresentazione bidimensionale. Sebbene i dettagli specifici di come Pei Xiu applicasse questi principi in pratica rimangono in gran parte perduti, la loro

formulazione rappresenta un momento cruciale nella storia della scienza e della tecnologia cinese.

Lo strumento e il metodo: il carro odometrico

Nel perseguimento di misurazioni accurate delle distanze, i cartografi cinesi ricorsero a uno strumento sofisticato: il *carro odometrico* (記里鼓車), noto anche come il "carro che batte il tamburo ogni li." Questo dispositivo è ben testimoniato nella letteratura cinese, con riferimenti che si estendono almeno al III secolo d.C. e probabilmente oltre.

Il funzionamento era elegante: un sistema di ingranaggi coordinati alle ruote del carro faceva scattare un meccanismo ogni volta che il carro completava una distanza pari a un *li*. Una figurina meccanica colpiva un tamburo, emettendo un suono percettibile che permetteva al misuratore di contare i *li* percorsi senza necessità di misurazioni continue. In alcuni resoconti, il meccanismo faceva cadere una piccola palla in un recipiente per ogni *li*, creando un conteggio visuale.

Questo rappresentava un'invenzione straordinaria perché risolveva un problema pratico concreto: le misurazioni di lunghe distanze richiedono pazienza, attenzione costante e metodo sistematico. Il carro odometrico automatizzava il conteggio, riducendo il carico cognitivo del misuratore e permettendo di mappare distanze di centinaia di chilometri con un'obiettività maggiore di quanto sarebbe possibile altrimenti.

Naturalmente, nessuno strumento è perfetto. Le imperfezioni nelle ruote, le variazioni di terreno, lo slittamento delle ruote su superfici morbide o bagnate -tutti questi fattori introducono errori sistematici e casuali. Non è documentato come i topografi cinesi gestissero questi errori. Probabilmente facevano multiple misurazioni della stessa rotta e mediavano i risultati, ma i dettagli specifici rimangono oscuri.

La bussola magnetica e la navigazione d'altura

L'invenzione della bussola magnetica in Cina rappresenta uno dei contributi tecnologici più significativi all'umanità. Le sue origini esatte rimangono dibattute tra gli storici, ma le evidenze suggeriscono un'invenzione durante la dinastia Han, inizialmente utilizzata per scopi di geomanzia (feng shui) piuttosto che per la navigazione.

La prima descrizione chiara di una bussola magnetica utilizzata per la navigazione appare nel testo *Mengxi Bitan* (夢溪筆談, "Colloqui in un Torrente Onirico") scritto da Shen Kuo intorno al 1088 d.C. Shen Kuo, scienziato e letterato della dinastia Song, documenta non solo l'uso della bussola, ma anche un'osservazione cruciale: la bussola non punta

esattamente al nord geografico, ma devia verso est di una quantità che non è trascurabile. Questa deviazione, oggi chiamata *declinazione magnetica*, rappresentava un problema pratico significativo per i navigatori, poiché seguire ciecamente la bussola avrebbe portato a errori sistematici di rotta.

L'osservazione di Shen Kuo della declinazione magnetica testimonial di una consapevolezza scientifica sofisticata. Egli riconosceva che il nord indicato dalla bussola era diverso dal nord astronomico, e che questa differenza variava geograficamente (sebbene i dettagli di quanto varia rimangono non completamente documentati nei suoi scritti). Per i navigatori, questo significava che era necessario mantenere tabelle di correzione che variavano a seconda della posizione geografica nel mare.

Durante la dinastia Song e posteriormente, le carte nautiche divennero sempre più sofisticate. Queste carte, chiamate *Dao Yi Zhi* (到一誌, "Registri delle Rotte"), includevano informazioni di direzione (espressa in termini di angoli rispetto al nord magnetico), distanze tra porti, e descrizioni dei pericoli marini noti -secche, scogli, aree di corrente forte.

Le spedizioni di Zheng He: il culmine della navigazione oceanica cinese

Nel XV secolo, durante la dinastia Ming, le capacità di navigazione oceanica cinese raggiunsero il loro culmine. L'ammiraglio Zheng He (1371-1433), comandante di una flotta imperiale straordinariamente grande e ben equipaggiata, intraprese sette grandi spedizioni tra il 1405 e il 1433. Queste spedizioni navigarono attraverso l'Oceano Indiano, visitando porti dall'Asia orientale all'Africa orientale, coprendo distanze che raggiungevano i 7000-8000 chilometri per singola traversata.

Queste spedizioni non erano esplorazioni alla ricerca di terre sconosciute, ma piuttosto missioni diplomatiche, commerciali e di proiezione di potere imperiale. Tuttavia, per compiere viaggi di questa portata, i navigatori di Zheng He dovevano possedere una comprensione pratica e sofisticata della navigazione oceanica. Le carte nautiche utilizzate durante queste spedizioni - alcune delle quali sono ancora conservate -mostrano un sistema di registrazione delle rotte che include distanze, direzioni, caratteristiche costali e ubicazioni di porti.

Sebbene i dettagli specifici di come gli errori di navigazione fossero gestiti rimangono parzialmente documentati, il fatto che le spedizioni completassero traversate oceaniche ripetute, visitassero le stesse destinazioni multiple volte, e tornassero in Cina attesta che il sistema di navigazione era sufficientemente affidabile per scopi pratici. I naufragi erano rari e quando occorreivano, erano generalmente attribuiti a tempeste piuttosto che a errori di navigazione grossolani.

L'astronomia e la geometria terrestre

La tradizione astronomica cinese era sofisticata e ben sviluppata, creando le basi teoriche per una comprensione della geometria della Terra. I testi astronomici antichi, come il *Huangdi Neijing* e i successivi *Shushu Jiyi* ("Memoria dei Metodi di Calcolo"), registrano osservazioni sistematiche dei corpi celesti.

Una conseguenza cruciale di queste osservazioni era la constatazione che la latitudine di un osservatore era direttamente correlata all'altezza angolare della stella polare (α Ursae Minoris) sopra l'orizzonte nord. Durante la dinastia Tang (618-907 d.C.), il monaco-astronomo e matematico Yixing (一行, 683-727) coordinò una serie di osservazioni astronomiche condotte da diversi siti geografici attraverso l'impero, misurando sistematicamente l'altezza della stella polare in ciascuna ubicazione. Yixing compilò questi risultati in tabelle che permettevano ai geografi posteriori di determinare approssimativamente la latitudine di una nuova ubicazione semplicemente misurando l'altezza della stella polare e confrontandola con le tabelle.

Questa pratica proseguì durante la dinastia Yuan. L'astronomo Guo Shoujing (郭守敬, 1231-1316), una figura straordinaria che combinava competenze in astronomia, idraulica e ingegneria, condusse un progetto sistematico di determinazione della latitudine di 27 siti chiave dell'Impero Yuan. Questi siti rappresentavano l'estensione nord-sud dell'impero, dalle regioni meridionali semi-tropicali ai confini settentrionali nelle steppe. Le latitudini di Guo Shoujing mostravano variazioni attese sulla base della posizione geografica, fornendo evidenza che il metodo era valido.

La determinazione della longitudine, per contro, rimane scarsamente documentata. A differenza della latitudine, che può essere determinata da un'osservazione istantanea della posizione di una stella, la longitudine richiede intrinsecamente informazioni sul tempo locale in diversi meridiani. Sebbene eclissi lunari siano simultanee per osservatori in longitudini diverse, la loro osservazione richiede orologi di straordinaria precisione e osservatori disposti strategicamente. Non c'è evidenza convincente che i geografi cinesi antichi abbiano sviluppato metodi sistematici e affidabili per la determinazione della longitudine su scale molto grandi. È possibile che abbiano stimato le differenze di longitudine misurando distanze est-ovest lungo paralleli noti, ma questo metodo è intrinsecamente impreciso e soggetto a errori accumulativi.

I grandi progetti infrastrutturali e la topografia

La realizzazione di grandi opere infrastrutturali richiede necessariamente competenze topografiche sofisticate. Il Grande Canale cinese, iniziato nella

dinastia Sui all'inizio del VII secolo e progressivamente esteso durante la Tang e la Song fino a raggiungere lunghezze superiori ai 1700 chilometri, testimonia l'esistenza di tali competenze.

Un canale è una struttura idraulica straordinariamente delicata. Deve permettere il flusso dell'acqua, ma non così rapidamente da causare erosione; deve drenare i sedimenti; deve rimanere praticabile per la navigazione. La progettazione di un canale lungo 1700 chilometri richiede la comprensione di principi di idraulica e la capacità di calcolare le pendenze appropriate per mantenere il flusso desiderato.

Le documentazioni amministrative della dinastia Song descrivono chiaramente che gli ingegneri incaricati del Grande Canale erano capaci di effettuare misurazioni di pendenza su distanze molto lunghe, di calcolare volumi di terra da scavare, e di correggere pendenze insufficienti costruendo sistemi di chiuse. Anche se i dettagli specifici dei metodi topografici rimangono parzialmente documentati, il fatto che un'opera di questa complessità sia stata realizzata con successo attesta che la topografia cinese aveva raggiunto un livello di sofisticazione considerevole.

Le reti di misurazione geodetica

Durante la dinastia Song e successivamente durante la Yuan, furono intraprese campagne di rilevamento territoriale su scale molto grandi. Il progetto più ambizioso documentato è quello coordinato da Guo Shoujing durante la Yuan, che determinò le coordinate geografiche (latitudini e, approssimativamente, longitudini) di 27 siti significativi attraverso l'Impero. Questo progetto implicava la necessità di interconnettere misurazioni da ubicazioni diverse e di creare una rete coerente di coordinate.

I metodi specifici utilizzati non sono completamente documentati, ma le fonti suggeriscono che erano coinvolti misurazioni angolari dal suolo (possibilmente utilizzando strumenti goniometrici primitivi) e misurazioni di distanze (utilizzando il carro odometrico). La capacità di produrre mappe relative coerenti dell'intero territorio dell'Impero testimonia che questi metodi, qualunque fossero i dettagli, erano sufficientemente affidabili per la pratica.

APPENDICE

Introduzione all'appendice

I metodi cartografici, geografici e geodetici degli antichi cinesi operavano secondo principi matematici che possono essere formalizzati nei termini della geometria moderna. Questa appendice non sostiene che i cartografi cinesi antichi "utilizzassero" queste formule - ovviamente non le utilizzavano in questa forma - ma piuttosto che i principi sottostanti ai loro metodi possono essere compresi e comunicati utilizzando questo formalismo. La traduzione tra la pratica storica e il formalismo moderno permette di verificare la coerenza logica dei metodi e di identificare i problemi pratici che essi risolvevano.

La scala uniforme e le trasformazioni affini

Il principio fondamentale della cartografia di Pei Xiu era la scala uniforme. Matematicamente, una mappa con scala uniforme è il risultato di una trasformazione affine dal piano geografico reale al piano della mappa.

Consideriamo due punti A e B nel territorio reale, con coordinate (x_A, y_A) e (x_B, y_B) rispetto a un sistema di riferimento geografico arbitrario (per esempio, con origine in un punto notevole e assi allineati con i punti cardinali). La distanza euclidea tra i due punti è:

$$d_{\text{reale}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Sulla mappa, i punti A e B sono rappresentati con coordinate (x'_A, y'_A) e (x'_B, y'_B) . Per una mappa con scala uniforme s (dove s è il rapporto tra le distanze sulla mappa e quelle nel territorio), vale la relazione:

$$d_{\text{mappa}} = \sqrt{(x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2} = s \times d_{\text{reale}}$$

Questa relazione deve valere per qualunque coppia di punti nella regione mappata. Una trasformazione che preserva questa proprietà è una trasformazione affine della forma:

$$\begin{aligned} x' &= s \times \cos(\theta) \times x - s \times \sin(\theta) \times y + t_x \\ y' &= s \times \sin(\theta) \times x + s \times \cos(\theta) \times y + t_y \end{aligned}$$

dove s è il fattore di scala uniforme, θ è l'angolo di rotazione (per l'allineamento del nord), e (t_x, t_y) sono traslazioni che posizionano la mappa sul foglio.

Pei Xiu utilizzava una scala del tipo $s = 1:2.000.000$ (ossia 1 cun sulla mappa ≈ 100 li nel territorio, con li ≈ 500 m e cun $\approx 2,4$ cm). Questo significa che una distanza reale di 1 chilometro appariva sulla mappa come una distanza di circa 0,05 centimetri -una scala estremamente ridotta che richiedeva capacità di disegno fine e di lettura attenta.

Importante: una trasformazione affine con fattore di scala uniforme s preserva non solo le distanze ma anche gli angoli e gli orientamenti relativi. Se due linee nel territorio formano un angolo α , le corrispondenti linee sulla mappa formano lo stesso angolo α . Questo riflette il principio del "fang xie" (angoli e direzioni) di Pei Xiu: gli angoli devono essere rappresentati accuratamente.

Le distanze e i percorsi sinuosi

Il principio di "dao li" (misurazione dei percorsi) affronta il problema che i percorsi reali non sono linee rette, ma curve spesso complicate. Una strada in montagna zigzaga; un fiume sinueggia seguendo il terreno; un confine montano segue le creste irregolari.

Se un percorso reale è parametrizzato da una funzione vettoriale $r(t) = (x(t), y(t))$ per $t \in [0, T]$, la lunghezza totale del percorso è data dall'integrale di linea:

$$L = \int_0^T \sqrt{[(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]} dt$$

In pratica, i topografi non calcolavano questo integrale esplicitamente, ma approssimavano il percorso come una sequenza di segmenti rettilinei. Se il percorso è suddiviso in n segmenti con estremi nei punti $P_0, P_1, \dots, P_n$, la lunghezza totale approssimata è:

$$L_{app} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]}$$

Per percorsi sufficientemente lisci e con suddivisione abbastanza fine, questa approssimazione converge al valore esatto con errore proporzionale a $1/n^2$ (Regola dei Trapezi).

Il carro odometrico permetteva di misurare L_{app} senza necessità di calcoli espliciti: il misuratore semplicemente contava i "li" completati man mano che il carro procedeva lungo il percorso effettivo. Se la rotta era tortuosa, il carro percorreva una distanza maggiore di quella in linea retta tra i punti terminali - una considerazione che i cartografi cinesi comprendevano chiaramente e che si riflette nel principio di "yu yuan" (compensazione delle curve).

L'altitudine e la distanza geodetica

Il principio di "gao xia" (variazioni di altitudine) riconosce che la Terra non è piatta. Se due punti A e B si trovano a quote diverse (elevazioni z_A e z_B rispetto a un piano di riferimento), la distanza effettiva tra di essi, misurata lungo il terreno, è diversa dalla loro distanza orizzontale.

Denotiamo con d_h la distanza orizzontale tra A e B (la proiezione della loro separazione sul piano orizzontale), e con $\Delta z = z_B - z_A$ la differenza di elevazione. La distanza lungo il terreno (assumendo un pendio rettilineo) è:

$$d_{\text{pendio}} = \sqrt{d_h^2 + (\Delta z)^2}$$

Il rapporto tra la distanza lungo il pendio e la distanza orizzontale è:

$$d_{\text{pendio}} / d_h = \sqrt{1 + (\Delta z / d_h)^2}$$

Per pendii moderati, dove $\Delta z/d_h$ è piccolo (per esempio, meno di 0,1), l'approssimazione del primo ordine è:

$$d_{\text{pendio}} \approx d_h \times [1 + (1/2) \times (\Delta z / d_h)^2]$$

Questo mostra che le differenze di elevazione hanno effetti non lineari sulla distanza misurata: raddoppiando l'elevazione relativa, l'errore sulla distanza (se ignorata l'elevazione) non raddoppia, ma quadruplica approssimativamente.

Per il progetto del Grande Canale, dove percorsi lunghi e pendenze controllate erano cruciali, il riconoscimento di questo effetto era praticamente importante. Una pendenza insufficiente sarebbe risultata in un flusso d'acqua troppo lento e nel possibile accumulo di sedimenti; una pendenza eccessiva avrebbe causato erosione e instabilità strutturale.

L'orientamento astronomico

Il principio di "zhun wang" (orientamento corretto) si basa sulla possibilità di determinare la direzione nord mediante osservazione astronomica. Il nord geografico vero è la direzione verso il polo nord celeste, la cui ubicazione può essere determinata osservando il movimento apparente delle stelle durante la notte.

La stella polare (α Ursae Minoris) non si trova esattamente al polo nord celeste, ma nelle vicinanze. Durante l'epoca di Zhang Heng e Pei Xiu (I-III secolo d.C.), la stella polare si trovava a una distanza angolare di circa $1,5^\circ$ - 2° dal polo celeste vero, a causa della precessione (il lento movimento del polo celeste dovuto alla variazione dell'asse terrestre).

Se un osservatore misura l'altezza angolare h della stella polare sopra l'orizzonte nord, e conosce la distanza angolare δ tra la stella polare e il polo celeste nord, la sua latitudine geografica φ è approssimativamente:

$$\varphi \approx h - \delta$$

(per δ piccolo, questa è un'approssimazione accurata al primo ordine)

L'osservazione che l'altezza della stella polare varia sistematicamente con la latitudine dell'osservatore fornisce evidenza indiretta della sfericità della Terra: su una Terra piatta, la stella polare manterrebbe la stessa altezza indipendentemente dalla posizione dell'osservatore.

La determinazione della latitudine mediante osservazione solare

Un metodo più preciso di determinazione della latitudine utilizza l'osservazione dell'altezza del Sole al mezzogiorno solare locale (quando il Sole transita sul meridiano dell'osservatore).

Al mezzogiorno solare, il Sole raggiunge la sua altezza massima sopra l'orizzonte. Questa altezza massima $h_{\odot}$ è correlata alla latitudine φ dell'osservatore e alla declinazione solare $\delta_{\odot}$ (l'angolo tra il piano dell'equatore celeste e la posizione del Sole nel cielo) dalla relazione:

$$h_{\odot} = 90^{\circ} - |\varphi - \delta_{\odot}|$$

(se l'osservatore e il Sole sono nello stesso emisfero)

Riorganizzando per φ :

$$\varphi = 90^{\circ} - h_{\odot} + \delta_{\odot}$$

(se $\delta_{\odot}$ e φ hanno lo stesso segno)

La declinazione solare varia durante l'anno secondo un ciclo annuale. Al solstizio d'estate (circa 21 giugno), $\delta_{\odot} \approx +23,44^{\circ}$; all'equinozio d'autunno (circa 21 settembre), $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$; al solstizio d'inverno (circa 21 dicembre), $\delta_{\odot} \approx -23,44^{\circ}$; all'equinozio di primavera (circa 21 marzo), $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$.

Se un osservatore misura l'altezza $h_{\odot}$ del Sole al mezzogiorno in un giorno noto dell'anno (e quindi con $\delta_{\odot}$ noto dalle tabelle astronomiche), può calcolare la sua latitudine. La precisione di questo metodo dipende dalla precisione della misura di $h_{\odot}$. Utilizzando uno strumento semplice come un gnomone (asta verticale) e misurando la lunghezza dell'ombra al mezzogiorno, è possibile determinare $h_{\odot}$ entro circa $0,5^{\circ}$ - 1° , che corrisponde

a un'incertezza di $0,5^\circ$ - 1° nella latitudine (pari a circa 55-110 chilometri di incertezza).

La struttura della rete geodetica

La determinazione di coordinate geografiche su un'area estesa richiede una rete di misurazioni interconnesse. Il metodo più semplice è la triangolazione: si stabilisce una base di lunghezza nota, si misurano gli angoli verso nuovi punti, e da questi si calcola la posizione dei nuovi punti.

Consideriamo una base AB di lunghezza nota b . Vogliamo determinare la posizione di un punto C. Se misuriamo gli angoli $\angle CAB = \alpha$ e $\angle CBA = \beta$, allora il terzo angolo è $\angle ACB = \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.

Utilizzando la legge dei seni:

$$a / \sin(\alpha) = b / \sin(\gamma) = c / \sin(\beta)$$

dove a è il lato BC e c è il lato AC, possiamo ricavare:

$$a = b \times \sin(\alpha) / \sin(\gamma)$$

$$c = b \times \sin(\beta) / \sin(\gamma)$$

Una volta conosciuti i tre lati del triangolo ABC, la posizione di C relativa ad A e B è determinata completamente. Questo processo può essere ripetuto: utilizzando il lato AC come base per il prossimo triangolo, si determina la posizione di un quarto punto D, e così via. Concatenando triangoli successivi, è possibile estendere la rete geodetica su vaste aree.

L'errore nella triangolazione si accumula con il procedere della rete. Se ogni misurazione angolare ha un errore casuale σ_α (per esempio, $\sigma_\alpha = 30'' = 0,00833^\circ \approx 0,0001454$ radianti), allora dopo n triangoli, l'errore relativo nella determinazione della distanza di un punto finale dalla base cresce approssimativamente secondo:

$$\epsilon_n \approx \sqrt{n} \times \sigma_\alpha$$

Per una rete di 27 punti (come quella di Guo Shoujing), questo rappresenta una sfida significativa nella gestione degli errori. I topografi cercavano di minimizzare l'accumulo di errori utilizzando triangoli il più possibile equilateri, evitando angoli molto acuti (dove piccoli errori angolari hanno effetti amplificati sulla determinazione della distanza), e probabilmente ripetendo misurazioni critiche e mediando i risultati.

Le trasformazioni dalla sfera al piano

Sebbene la maggior parte della cartografia cinese antica riguardasse regioni che potevano essere trattate come planari (dove la curvatura della Terra era trascurabile), i geografi cinesi erano consapevoli della sfericità della Terra. Il fatto che la latitudine della stella polare varia con la posizione geografica, combinato con altre osservazioni astronomiche, fornisce evidenza della forma sferica del nostro pianeta.

Su una sfera di raggio R , un punto può essere localizzato utilizzando le coordinate sferiche (φ, λ) , dove φ è la latitudine (angolo dal piano equatoriale) e λ è la longitudine (angolo rispetto a un meridiano di riferimento).

La distanza più breve tra due punti sulla sfera è l'arco di cerchio massimo (geodetica). Se due punti hanno coordinate sferiche (φ_1, λ_1) e (φ_2, λ_2) , la distanza angolare $\Delta\sigma$ tra di essi (misurata dal centro della sfera) è data dalla formula:

$$\cos(\Delta\sigma) = \sin(\varphi_1) \times \sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \times \cos(\varphi_2) \times \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

La distanza effettiva sulla superficie sferica è:

$$D_{\text{geodetica}} = R \times \Delta\sigma$$

Per distanze non troppo grandi (inferiori a qualche centinaio di chilometri), la sfera può essere approssimata localmente da un piano tangente, e la distanza approssimata è:

$$D_{\text{app}} \approx R \times \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\lambda \times \cos(\varphi_{\text{medio}}))^2}$$

dove $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$ sono le differenze di coordinate in radianti, e $\varphi_{\text{medio}} = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ è la latitudine media. Questa approssimazione è accurata entro il 2% per distanze fino a circa 500-600 chilometri.

I geografi cinesi della dinastia Tang stimavano il raggio terrestre osservando come l'altezza della stella polare varia con la latitudine. Se due osservatori separati da una distanza nord-sud D misurano differenze di latitudine $\Delta\varphi$ (misurate in radianti), allora:

$$D \approx R \times \Delta\varphi$$

Quindi:

$$R \approx D / \Delta\varphi$$

Le stime documentate del raggio terrestre dalla tradizione cinese

suggerivano valori dell'ordine di 40.000 li (circa 20 milioni di metri), che confrontati col valore moderno di 6.371.000 metri mostrano deviazioni significative ma del giusto ordine di grandezza. Queste stime indicano che i geografi cinesi comprendevano il principio fondamentale, anche se i dettagli numerici rimangono soggetti a incertezza storica.

Gli errori di misurazione e le loro propagazioni

Un aspetto fondamentale della metrologia è la comprensione di come gli errori si propagano attraverso i calcoli. Sebbene i geografi cinesi antichi non formalizzassero questo concetto matematicamente, le loro pratiche -come le misurazioni ripetute e la media dei risultati -suggeriscono una consapevolezza pratica del problema.

Se una misurazione ha un errore casuale con deviazione standard σ , e si eseguono n misurazioni indipendenti della stessa quantità, la deviazione standard della media è:

$$\sigma_{\text{media}} = \sigma / \sqrt{n}$$

Questo significa che aumentando il numero di misurazioni, l'incertezza della media diminuisce come $1/\sqrt{n}$. Per ridurre l'incertezza di un fattore 10, sono necessarie 100 misurazioni; per ridurla di un fattore 2, sono necessarie 4 misurazioni.

Nel contesto di misurazioni con il carro odometrico, questo significa che percorrere la stessa rotta multipli volte e mediare i risultati produce stime più affidabili della distanza. Però, esiste una differenza cruciale tra errori casuali (che si mediano con le ripetizioni) ed errori sistematici (che rimangono costanti e non si mediano). Le imperfezioni nelle ruote del carro, se sempre della stessa magnitudine, introducono errori sistematici che il mediarsi non può correggere.

La pendenza idraulica e il flusso dell'acqua

Il Grande Canale cinese rappresenta un'applicazione pratica sofisticata dei principi di idraulica. Un canale deve permettere il flusso dell'acqua a una velocità controllata: troppo lentamente e l'acqua stagna con accumulo di sedimenti; troppo rapidamente e il canale si erode.

La relazione tra pendenza, profondità del canale, larghezza e velocità di flusso coinvolge diversi principi della meccanica dei fluidi. Per un canale rettangolare di larghezza w , profondità d , e pendenza i (dislivello per unità di lunghezza), la velocità media del flusso è approssimativamente:

$$v \approx C \times \sqrt{(R_h \times i)}$$

dove $R_h = (w \times d) / (w + 2d)$ è il raggio idraulico (il rapporto dell'area della sezione trasversale al perimetro bagnato), e C è un coefficiente che dipende dalla rugosità del letto del canale.

Per un canale largo ($w \gg d$), il raggio idraulico è approssimativamente d , quindi:

$$v \approx C \times \sqrt{(d \times i)}$$

La portata volumetrica (volume d'acqua per unità di tempo) è:

$$Q = v \times A = v \times w \times d \approx C \times w \times d \times \sqrt{(d \times i)}$$

Se si desidera mantenere una portata costante Q mentre la profondità d del canale cambia (per esempio, per superare differenze di elevazione), la pendenza necessaria deve variare come:

$$i \propto Q^2 / (w^2 \times d^3)$$

Questo mostra che per mantenere la stessa portata in un canale più profondo, la pendenza deve essere drasticamente ridotta. Se, ad esempio, si raddoppia la profondità, la pendenza necessaria si riduce di un fattore di 8.

I costruttori del Grande Canale comprendevano intuitivamente questi principi, anche senza formalizzarli matematicamente. Progettavano sezioni di canale con pendenze variabili, costruivano chiuse per controllare il livello dell'acqua in segmenti differenti, e mantenevano il flusso a velocità relativamente costante. Le documentazioni amministrative della Song registrano che gli ingegneri effettuavano misurazioni di pendenza accuratamente e adattavano il profilo del canale per ottenere i risultati desiderati.

I volumi e i calcoli di scavo

La progettazione e costruzione del Grande Canale richiedeva la stima del volume di terra da scavare in ciascun segmento. Il calcolo dei volumi non può essere effettuato direttamente, ma piuttosto attraverso l'approssimazione della forma tridimensionale di terra da scavare.

Un metodo comune è quello di suddividere il volume in sezioni trasversali parallele. Supponiamo che il canale sia scavato lungo un percorso di lunghezza L , e che la sezione trasversale vari lungo il percorso. Se il percorso è suddiviso in n segmenti di lunghezza Δx (con $L = n \times \Delta x$), e l'area della sezione trasversale al i -esimo segmento è A_i , allora il volume totale può

essere approssimato utilizzando la regola dei trapezi:

$$V \approx \Delta x \times [(A_0 + A_n) / 2 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i]$$

Una approssimazione più accurata utilizza la regola di Simpson (che assume una variazione parabolica dell'area tra i punti di campionamento):

$$V \approx (\Delta x/3) \times [A_0 + A_n + 4 \times \sum_{i \text{ dispari}} A_i + 2 \times \sum_{i \text{ pari}} A_i]$$

Per un canale di 1700 chilometri suddiviso in 170 segmenti di 10 chilometri ciascuno, con aree di sezione trasversale che variano (per esempio, da 50 m² a 100 m² in diverse regioni), il volume totale calcolato avrebbe permesso agli amministratori di stimare il lavoro totale richiesto e pianificare il dispiegamento della manodopera.

Se, ad esempio, lo scavo di 1 m³ richiedesse 1 persona-giorno di lavoro, e il volume totale fosse 1,7 miliardi di m³ (una stima plausibile per il Grande Canale), il progetto richiederebbe circa 1,7 miliardi di persone-giorni. Con una forza lavoro di 500.000 persone, il progetto richiederebbe circa 3.400 giorni di lavoro continuato -circa 9 anni di lavoro ininterrotto, un orizzonte temporale che corrisponde qualitativamente alla durata nota di alcuni periodi di costruzione del Grande Canale.

La sinuosità fluviale e le curve

Il principio di "yu yuan" (compensazione delle curve) affronta il problema di come rappresentare elementi geografici sinuosi -fiumi, confini montani, coste irregolari -su una mappa a scala ridotta.

Un fiume può essere descritto parametricamente come una curva $r(s) = (x(s), y(s))$ dove s rappresenta la distanza lungo il percorso fluviale (da $s = 0$ alla sorgente a $s = L$ alla foce). La lunghezza effettiva del fiume è:

$$L_{\text{fiume}} = \int_0^L \sqrt{(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2} ds$$

Se il fiume fosse una linea retta dalla sorgente alla foce, la "lunghezza retta" sarebbe la distanza euclidea:

$$L_{\text{retta}} = \sqrt{(x_{\text{foce}} - x_{\text{sorgente}})^2 + (y_{\text{foce}} - y_{\text{sorgente}})^2}$$

L'indice di sinuosità è il rapporto:

$$\sigma = L_{\text{fiume}} / L_{\text{retta}}$$

Per fiumi molto sinuosi, σ può raggiungere valori di 2 o superiori, indicando

che il percorso fluviale effettivo è 2 o più volte più lungo della proiezione retta. Su una mappa, rappresentare ogni meandro in dettaglio è impossibile a causa della scala ridotta. Invece, il cartografo deve scegliere di rappresentare il corso generale del fiume, disegnando una versione semplificata che comunica l'idea della sinuosità senza mostrare ogni curva. Questo è ciò che "yu yuan" riconosceva: la necessità di semplificare mantenendo l'essenza.

Un approccio matematico moderno utilizza curve di approssimazione (spline). Se si identificano n punti di controllo lungo il percorso del fiume ($P_1, P_2, \dots, P_n$), si può costruire una curva liscia che passa attraverso questi punti e approssima il corso generale. Il disegno della spline sulla mappa comunica sia la direzione generale che la sinuosità approssimata, senza necessità di rappresentare ogni ondulazione.

Conclusione dell'appendice

Questa appendice ha formalizzato matematicamente i principi che sottostanno ai metodi cartografici, geografici e geodetici degli antichi cinesi. I cartografi cinesi non utilizzavano questo formalismo -le formule qui presentate sono costrutti moderni -ma operavano secondo i principi che queste formule descrivono. La traduzione tra la pratica storica e il formalismo moderno serve a chiarire la logica intrinseca di questi metodi, a verificare la loro coerenza, e a identificare i problemi pratici che risolvevano.

I risultati documentati della cartografia cinese -mappe che permettevano la pianificazione amministrativa, la navigazione oceanica affidabile, la progettazione di infrastrutture complesse -attestano l'efficacia di questi metodi. Mentre i dettagli specifici di come furono sviluppati e utilizzati rimangono in gran parte oscuri a causa della perdita di molti testi storici, i principi sottostanti sono chiaramente deducibili dalle fonti disponibili e dalle testimonianze del loro successo pratico.